3.3 The Shuffle-Exchange and de Bruijn Graphs

Παράλληλοι Αλγόριθμοι

Θανάσης Κουτσώνας

μΠλ∀

5 Ιουλίου 2006

Περίγραμμα

Ο γράφος Shuffle-Exchange.

- *Κατασκευή του γράφου*
- *Ιδιότητες*

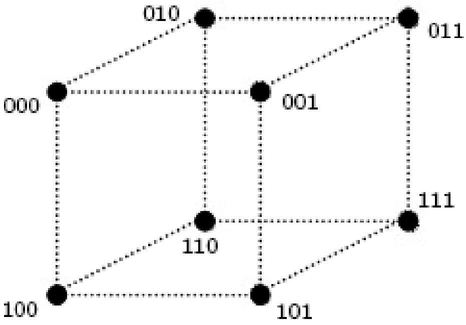
Ο γράφος de Bruijn.

- *Κατασκευή του γράφου*
- *Ιδιότητες*
- *Σχέση με τον shuffle-exchange γράφο*

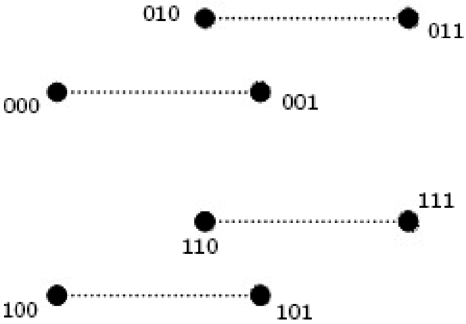
Υπολογιστικές Ισοδυναμίες.

- *Εξομοίωση του Hypercube*
- *Ομοιότητα με τον γράφο Butterfly*

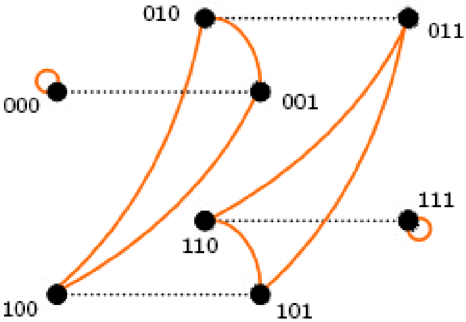
Ο γράφος Hypercube για r=3



Ο γράφος Shuffle-Exchange για r=3



Ο γράφος Shuffle-Exchange για r=3



Η κατασκευή του γράφου Shuffle-Exchange

Ο γράφος *Shuffle-Exchange* r-διαστάσεων δημιουργείται πάνω στους $N = 2^r$ κόμβους ενός r-διάστατου hypercube. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί ένα δυαδικό r-διάνυσμα $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$.

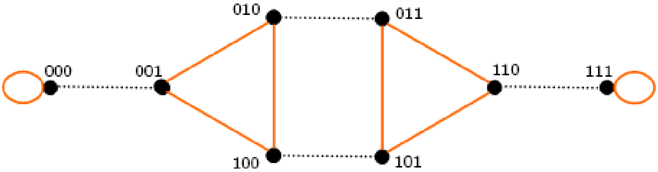
- Δύο κόμβοι ενώνονται από μία exchange ακμή αν τα διανύσματά τους διαφέρουν ακριβώς στην τελευταία θέση.
- Δύο κόμβοι ενώνονται από μία shuffle ακμή αν το διανύσμα θέσης του ενός είναι κυκλική μετατόπιση του άλλου. π.χ. ο κόμβος $u_1 u_2 \ldots u_{r-1} u_r$ ενώνεται με τα $u_r u_1 \ldots u_{r-1}$ και $u_2 \ldots u_r, u_1$.

Ιδιότητες

Ο r-διάστατος shuffle-exchange γράφος έχει:

- $N = 2^r$ κόμβους
- $3 \cdot 2^{r-1}$ ακμές
- διάμετρο: $\Theta(logN)$
- bisection width: $\Theta(N/logN)$
- βαθμό: 3

Ιδιότητες



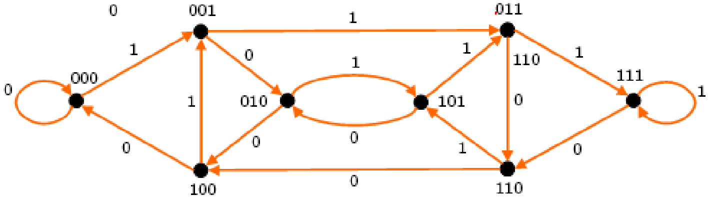
Η κατασκευή του γράφου de Bruijn

Ο γράφος *de Bruijn* r-διαστάσεων έχει $N = 2^r$ κόμβους. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί ένα δυαδικό r-διάνυσμα $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$.

Υπάρχουν δύο εξερχόμενες ακμές από κάθε κόμβο $u_1 u_2 \ldots u_r$ στους κόμβους $u_2 \ldots u_r 0$ και $u_2 \ldots u_r 1$. Στην πρώτη περίπτωση η ακμή είναι τύπου 1 και στην δεύτερη τύπου 2.

Συνεπώς κάθε κόμβος έχει αντίστοιχα και δύο εισερχόμενες ακμές.

Ο γράφος de Bruijn για r=3



Ιδιότητες

Ο r-διάστατος de Bruijn γράφος έχει:

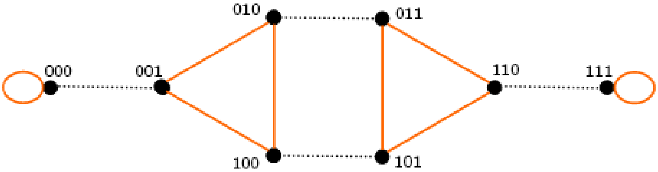
- $N = 2^r$ κόμβους
- 2^{r+1} κατευθυνόμενες ακμές
- διάμετρο: $\Theta(logN)$
- bisection width: $\Theta(N/logN)$
- βαθμό: 4 (2 in, 2 out)

Από τον Shuffle-Exchange στον de Bruijn γράφο

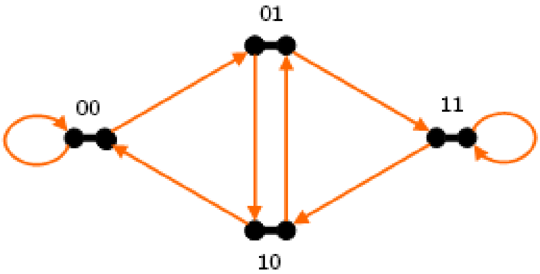
Ο r-διάστατο de Bruijn γράφος μπορεί να κατασκευαστεί από τονν $(r+1)$-διάστατο shuffle-exchange γράφο, συμπτύσσοντας όλες τις exchange ακμές του τελευταίου.

Δηλαδή, οι κόμβοι $u_1 \ldots u_r 0$ και $u_1 \ldots u_r 1$ θα ενωθούν για να αποτελέσουν τον κόμβο $u_1 \ldots u_r$ του γράφου de Bruijn.

Από τον Shuffle-Exchange στον de Bruijn γράφο



Από τον Shuffle-Exchange στον de Bruijn γράφο



Εξομοίωση του Hypercube

Έστω ένας κανονικός αλγόριθμος $\mathcal{A}$ που τερματίζει σε $\mathcal{T}$ βήματα σε ένα hypercube N-κόμβων.

Ο αλγόριθμος $\mathcal{A}$ μπορεί να εξομοιωθεί σε $2\mathcal{T} - 1$ βήματα σε ένα shuffle-exchange γράφο με N κόμβους και

Ακόμα καλύτερα, σε $\mathcal{T}$ βήματα σε ένα de Bruijn γράφο με $N/2$ κόμβους.

Έτσι, όλοι οι αλγόριθμοι που περιγράφηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο μπορούν να εκτελεστούν από τους γράφους αυτούς χωρίς απώλεια υπολογιστικής αποτελεσματικότητας.

Σκιαγράφηση της απόδειξης (shuffle-exchange)

Αρχικά πρέπει να αντιστοιχίσουμε τις διεργασίες των κόμβων του hypercube στους κόμβους του shuffle-exchange γράφου, έτσι ώστε το πρώτο βήμα να μπορεί να εκτελεστεί άμεσα.

Η εξομοίωση συνεχίζει χρησιμοποιώντας διαδοχικά

- τις shuffle ακμές για την τοποθέτηση των διεργασιών στους κατάλληλους κόμβους,
- και τις exchange ακμές για την εξομοίωση των υπολογισμών που εκτελούνταν στον hypercube.

Άρα, τα $\mathcal{T}$ βήματα εξομοιώνονται σε $2\mathcal{T} - 1$ βήματα.

Σκιαγράφηση της απόδειξης (de Bruijn)

Η ίδια εξομοίωση μπορεί να εκτελεστεί από τον de Bruijn γράφο με $N/2$ κόμβους, χωρίς την ανάγκη των exchange ακμών.

Άρα, $\mathcal{T}$ βήματα είναι αρκετά για την εξομοίωση του αλγορίθμου $\mathcal{A}$.

Σημείωση: σε κάθε κόμβο του γράφου de Bruijn εξομοιώνονται δύο διεργασίες του hypercube και έτσι ο τοπικός υπολογισμός που διεξάγεται σε κάθε κόμβο είναι διπλάσιος εκείνου των κόμβων του hypercube.

Ομοιότητα με τον γράφο Butterfly

Από κατασκευαστικής πλευράς, ύστερα από μια προσεχτική εξέταση, διαπιστώνει κανείς ότι υπάρχουν κάποιες ομοιότητες, ωστόσο παραμένουν ουσιώδεις διαφορές.

Από την άποψη της υπολογιστικής ικανότητας όμως, αποδεικνύεται ότι οι δύο οικογένειες δικτύων είναι ισοδύναμες.

Τελικά όλα τα δίκτυα φραγμένου βαθμού της μορφής του hypercube που περιγράφηκαν στις δύο τελευταίες ενότητες είναι υπολογιστικά ισοδύναμα.

Ένα μαγικό κόλπο (Persi Diaconis)

Ο μάγος χρησιμοποιεί μία τράπουλα από 2^r χαρτιά και r εθελοντές. Κάθε εθελοντής κόβει μια φορά και τελικά παίρνει από ένα χαρτί.

Ο μάγος τότε επιχειρεί να διαβάσει το μυαλό των εθελοντών, αποτρέπεται όμως από κάποια αρνητική ενέργεια και ζητά να μάθει τουλάχιστον το χρώμα του χαρτιού του καθενός.

Τότε όλα ξεκαθαρίζουν στο μυαλό του και αποκαλύπτει διαδοχικά όλα τα χαρτιά των εθελοντών.

Πώς γίνεται;

Η ακολουθία de Bruijn

Μία δυαδική ακολουθία μήκους 2^r είναι de Bruijn, αν κάθε υποακολουθία μήκους r εμφανίζεται ακριβώς μία φορά, συμπεριλαμβανομένης και της κυκλικής περιστροφής. π.χ.

$$00010111$$

Από το Eulerian tour του de Bruijn με 4 κόμβους:

$$11 \rightarrow 10 \rightarrow 00 \rightarrow 00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 11$$

Από το Hamiltonian cycle του de Bruijn με 8 κόμβους:

$$000 \rightarrow 001 \rightarrow 010 \rightarrow 101 \rightarrow 011 \rightarrow 111 \rightarrow 110 \rightarrow 110 \rightarrow 000$$